



ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2024

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ

Ημερομηνία: 28/06/2024

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α': Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int (x^3 - 6x^2 + 4x - 12) dx$$

Λύση

Έχουμε:

$$\int (x^3 - 6x^2 + 4x - 12) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 2x^2 - 12x + c.$$

2. Δίνονται οι ηλικίες οκτώ (8) υπαλλήλων μιας εταιρείας:

36, 37, 32, 30, 34, 30, 37, 40

Να υπολογίσετε:

- α) τα τεταρτημόρια Q_1, Q_2, Q_3 (3 Μονάδες)
β) το εύρος (R) των πιο πάνω ηλικιών και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος (IQR). (2 Μονάδες)

Λύση

Αρχικά γράφουμε τις ηλικίες σε αύξουσα σειρά:

30, 30, 32, 34, 36, 37, 37, 40.

- α) Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός ($n = 8$), άρα η διάμεσος είναι:

$$Q_2 = \frac{34 + 36}{2} = 35.$$

Για το πρώτο τεταρτημόριο (Q_1), βρίσκουμε τη διάμεσο του πρώτου μισού των παρατηρήσεων, δηλαδή των 30, 30, 32, 34, που είναι και πάλι άρτιου πλήθους και επομένως

$$Q_1 = \frac{30 + 32}{2} = 31.$$

Για το τρίτο τεταρτημόριο (Q_3), βρίσκουμε τη διάμεσο του δεύτερου μισού των παρατηρήσεων, δηλαδή των 36, 37, 37, 40, που είναι και πάλι άρτιου πλήθους και επομένως

$$Q_3 = \frac{37 + 37}{2} = 37.$$

- β) Το εύρος (R) των οκτώ ηλικιών είναι η διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη ηλικία, άρα

$$R = 40 - 30 = 10.$$

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος (IQR) είναι:

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 37 - 31 = 6.$$

3. Δίνεται η λέξη: **M A P Γ A P I T A**

- α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης. (2 Μονάδες)
β) Να βρείτε πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς περιέχουν τη λέξη «PITA». (3 Μονάδες)

Λύση

Τα 9 γράμματα της λέξης είναι: **A, A, A, P, P, M, Γ, I, T.**

- α) Κάθε αναγραμματισμός της λέξης **M A P Γ A P I T A** ισοδυναμεί με μια επαναληπτική μετάθεση των 9 αντικειμένων, από τα οποία τα τρία (**AAA**) είναι τα ίδια και διαφορετικά από όλα τα υπόλοιπα και τα δύο (**PP**) είναι τα ίδια και διαφορετικά από όλα τα άλλα. Συνεπώς, το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης (συμπεριλαμβανομένης) είναι:

$$M_9^e = \frac{9!}{3! \cdot 2!} = 30240.$$

- β) Θεωρούμε τη λέξη «**PITA**», ως ένα γράμμα. Έτσι οι κάθε αναγραμματισμός από τους ζητούμενους, ισοδυναμεί με μια επαναληπτική μετάθεση των 6 αντικειμένων **A, A, M, P, Γ, «PITA»**, από τα οποία τα δυο (**AA**) είναι τα ίδια και διαφορετικά από όλα τα άλλα. Συνεπώς, το πλήθος των ζητούμενων αναγραμματισμών είναι:

$$M_6^e = \frac{6!}{2!} = 360.$$

4. Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία $f''(x) = 4x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες $f'(-1) = 0$ και $f(-1) = 1$.

Λύση

Έχουμε

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int (4x - 1) dx = 2x^2 - x + c_1.$$

Υπολογίζουμε τη σταθερά c_1 από την πρώτη συνθήκη:

$$f'(1) = 0 \implies 2(-1)^2 - (-1) + c_1 = 0 \implies c_1 = -3.$$

Άρα $f'(x) = 2x^2 - x - 3$. Ολοκληρώνουμε ξανά για να βρούμε το $f(x)$:

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x^2 - x - 3) dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 3x + c_2.$$

Υπολογίζουμε τη σταθερά c_2 από την δεύτερη συνθήκη:

$$\begin{aligned} f(-1) = 1 &\implies 2 \cdot \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 3(-1) + c_2 = 1 \\ &\implies -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 3 + c_2 = 1 \\ &\implies c_2 = 1 - 3 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{5}{6}, x \in \mathbb{R}.$$

Σημείωση: Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η f ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος, αφού:

- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{5}{6} \right)' = 2x^2 - x - 3$$

και

$$f''(x) = (2x^2 - x - 3)' = 4x - 1.$$

- $f'(-1) = 2(-1)^2 - (-1) - 3 = 0.$
- $f(-1) = \frac{2}{3}(-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 - 3(-1) - \frac{5}{6} = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 3 - \frac{5}{6} = 1.$

5. Δίνεται ημισφαίριο όγκου $144\pi \text{ cm}^3$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του ημισφαίριου.

Λύση

Είναι

$$V_{\text{ημισφαίριου}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3}.$$

Άρα

$$V_{\text{ημισφαίριου}} = 144\pi \implies 144\pi = \frac{2\pi R^3}{3} \implies R^3 = \frac{3 \cdot 144}{2} = 216 \implies R = 6 \text{ cm}.$$

Άρα

$$E_{\text{ημισφαίριου}} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2 = 3\pi \cdot 6^2 = 108\pi \text{ cm}^2.$$

Σημείωση: Στη λύση θεωρήσαμε ότι το εφόσον το ημισφαίριο έχει όγκο, τότε είναι κλειστό. Συνεπώς στον υπολογισμό του εμβαδού της ολικής επιφάνειάς του λάβαμε υπόψη και το εμβαδόν της κυκλικής βάσης.

6. Η συνάρτηση $f(x) = \kappa x^3 + 3x^2 + 2\lambda$, $x \in \mathbb{R}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = -2$, την τιμή $f(-2) = 0$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ . (3 Μονάδες)

β) Να χαρακτηρίσετε το είδος του ακροτάτου που παρουσιάζει η συνάρτηση f στο $x = -2$. (2 Μονάδες)

Λύση

α) Έχουμε $f'(x) = 3\kappa x^2 + 6x$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = -2$, τότε $f'(-2) = 0$ άρα:

$$3\kappa(-2)^2 + 6(-2) = 0 \implies 12\kappa - 12 = 0 \implies \kappa = 1.$$

Επίσης έχουμε ότι $f(-2) = 0$, άρα:

$$\kappa(-2)^3 + 3(-2)^2 + 2\lambda = 0 \implies -8 + 12 + 2\lambda = 0 \implies 4 + 2\lambda = 0 \implies \lambda = -2.$$

β) Έχουμε $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$. Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της f' .

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$ max $\searrow$ min $\nearrow$				

Από τον πίνακα παρατηρούμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = -2$.
Εναλλακτικά: Επειδή

$$f'(x) = 3x^2 + 6x \implies f''(x) = 6x + 6 \implies f''(-2) = -6 < 0,$$

τότε από κριτήριο δεύτερης παραγώγου η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = -2$.

7. Από 4 Μαθηματικούς, 2 Φυσικούς και 3 Χημικούς ενός Λυκείου θα επιλεγεί μια πενταμελής ομάδα για να εκπροσωπήσει το σχολείο σε ένα επιστημονικό συνέδριο Χημείας. Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή, αν στην ομάδα:

- α) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός, (1 Μονάδα)
- β) θα υπάρχουν ακριβώς δύο Χημικοί, (2 Μονάδες)
- γ) θα υπάρχει τουλάχιστον ένας Φυσικός και τουλάχιστον ένας Χημικός. (2 Μονάδες)

Λύση

α) Γίνεται με

$$\binom{9}{5} = \frac{9!}{5! \cdot 4!} = 126$$

τρόπους.

β) Μπορούμε να επιλέξουμε τους δύο χημικούς με $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$ τρόπους και τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας με $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ τρόπους.

Τελική Απάντηση: Γίνεται με $3 \cdot 20 = 60$ τρόποι.

γ) **Πρώτη Λύση:** Ελέγχουμε περιπτώσεις αναλόγως με το πόσους Φυσικούς, Χημικούς και Μαθηματικούς έχει η ομάδα:

- **Περίπτωση 1:** Η ομάδα αποτελείται από 1 Φυσικό, 1 Χημικό και 3 Μαθηματικούς. Γίνεται με

$$\binom{2}{1} \binom{3}{1} \binom{4}{3} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \text{ τρόπους.}$$

- **Περίπτωση 2:** Η ομάδα αποτελείται από 1 Φυσικό, 2 Χημικούς και 2 Μαθηματικούς. Γίνεται με

$$\binom{2}{1} \binom{3}{2} \binom{4}{2} = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36 \text{ τρόπους.}$$

- **Περίπτωση 3:** Η ομάδα αποτελείται από 1 Φυσικό, 3 Χημικούς και 1 Μαθηματικό. Γίνεται με

$$\binom{2}{1} \binom{3}{3} \binom{4}{1} = 2 \cdot 1 \cdot 4 = 8 \text{ τρόπους.}$$

- **Περίπτωση 4:** Η ομάδα αποτελείται από 2 Φυσικούς, 1 Χημικό και 2 Μαθηματικούς. Γίνεται με

$$\binom{2}{2} \binom{3}{1} \binom{4}{2} = 1 \cdot 3 \cdot 6 = 18 \text{ τρόπους.}$$

- **Περίπτωση 5:** Η ομάδα αποτελείται από 2 Φυσικούς, 2 Χημικούς και 1 Μαθηματικό. Γίνεται με

$$\binom{2}{2} \binom{3}{2} \binom{4}{1} = 1 \cdot 3 \cdot 4 = 12 \text{ τρόπους.}$$

- **Περίπτωση 6:** Η ομάδα αποτελείται από 2 Φυσικούς και 3 Χημικούς. Γίνεται με

$$\binom{2}{2} \binom{3}{3} \binom{4}{0} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \text{ τρόπο.}$$

Τελική Απάντηση: Γίνεται με $24 + 36 + 8 + 18 + 12 + 1 = 99$ τρόπους.

Δεύτερη Λύση: Υπάρχουν $\binom{7}{5} = 21$ τρόποι με τους οποίους η ομάδα δεν περιλαμβάνει κάποιον Φυσικό και $\binom{6}{5} = 6$ τρόποι με τους οποίους η ομάδα δεν περιλαμβάνει κάποιον Χημικό. Επειδή υπάρχουν μόνο 4 μαθηματικοί, αναγκαστικά η ομάδα πρέπει να περιλαμβάνει κάποιον Φυσικό ή Χημικό.

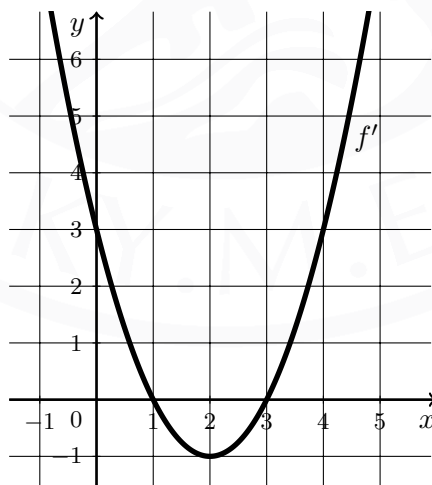
Άρα υπάρχουν $21 + 6 - 0 = 27$ τρόποι με τους οποίους η ομάδα δεν περιλαμβάνει Φυσικό ή δεν περιλαμβάνει Χημικό.

Τελική Απάντηση: Γίνεται με $126 - 27 = 99$ τρόπους.

8. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου της f .

- Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας της f . (2 Μονάδες)
- Να βρείτε για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα. (2 Μονάδες)
- Να βρείτε για ποια τιμή του x η f παρουσιάζει σημείο καμπής. (1 Μονάδα)



Λύση

- Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου για την f' :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	</				

Με βάση τον πιο πάνω πίνακα η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$.

β) Με βάση τον πίνακα στο ερώτημα (α), η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 1$ και τοπικό ελάχιστο για $x = 3$.

γ) Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, \infty)$. Άρα η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x = 2$.

Αναλυτικότερα: Μπορούμε να κατασκευάσουμε τον πιο κάτω πίνακα προσήμου για την f'' :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f			

Επειδή $f''(2) = 0$ και η f'' αλλάζει πρόσημο στο $x = 2$, τότε η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x = 2$.

9. Δίνονται δυο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με:

$$P(B) = \frac{7}{10}, \quad P(A|B) = \frac{3}{7}, \quad P(A - B) = \frac{1}{5}$$

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Γ: «να μην πραγματοποιηθεί το B » (1 Μονάδα)

Δ: «να πραγματοποιηθεί και το A και το B » (1,5 Μονάδες)

Ε: «να μην πραγματοποιηθεί το A δεδομένου ότι δεν πραγματοποιήθηκε το B » (2,5 Μονάδες)

Λύση

Έχουμε

$$P(\Gamma) = P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}.$$

Επίσης

$$P(A|B) = \frac{3}{7} \implies \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{7}$$

άρα

$$P(\Delta) = P(A \cap B) = \frac{3}{7}P(B) = \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{10} = \frac{3}{10}.$$

Από

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

παίρνουμε

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}.$$

Αυτό δίνει

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{9}{10}.$$

Άρα

$$P(E) = P(A'|B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(B')} = \frac{1/10}{3/10} = \frac{1}{3}.$$

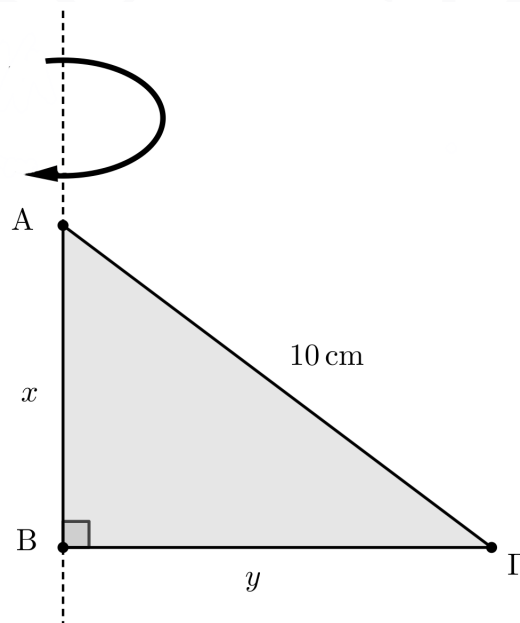
10. Στο πιο κάτω σχήμα το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B} = 90^\circ$), περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε). Τα σημεία A και B ανήκουν στην ευθεία (ε). Αν $AB = x$, $B\Gamma = y$ και $A\Gamma = 10$ cm:

α) να δείξετε ότι ο όγκος του παραγόμενου στερεού δίνεται από τον τύπο

$$V(x) = \frac{\pi}{3}(100x - x^3), \quad 0 < x < 10$$

(1,5 Μονάδες)

β) να βρείτε το μήκος του ύψους του παραγόμενου στερεού, ώστε ο όγκος του να είναι μέγιστος.



(3,5 Μονάδες)

Λύση

α) Από το σχήμα έχουμε:

$$x^2 + y^2 = 10^2 = 100 \implies y^2 = 100 - x^2.$$

Πρέπει $x > 0$. Επίσης,

$$y^2 > 0 \implies 100 - x^2 > 0 \implies x^2 < 100 \implies x < 10. \implies 0 < x < 10.$$

Το παραγόμενο στερεό είναι κώνος με ακτίνα βάσης y και ύψος x . Άρα

$$V(x) = V_{\text{κων.}} = \frac{\pi R^2 v}{3} = \frac{\pi y^2 x}{3} = \frac{\pi(100 - x^2)x}{3} = \frac{\pi}{3}(100x - x^3), \quad 0 < x < 10.$$

β) Έχουμε

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}(100 - 3x^2).$$

Άρα

$$V'(x) = 0 \iff x = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}, \quad (0 < x < 10)$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου για τη V' .

x	0	$\frac{10\sqrt{3}}{3}$	10
$V'(x)$		+	−
V		$\nearrow$ max $\searrow$	

Άρα ο όγκος γίνεται μέγιστος για ύψος μήκους $x = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.



ΜΕΡΟΣ Β': Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = x(x+3)^2$$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων. (2 Μονάδες)
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς:
- τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα, (3 Μονάδες)
 - την κυρτότητα και τα σημεία καμπής, (2 Μονάδες)
 - τη συμπεριφορά της στα άκρα του πεδίου ορισμού της. (1 Μονάδα)
- γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (2 Μονάδες)

Λύση

- α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική συνάρτηση.
Στη συνέχεια, βρίσκουμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων.
- Αν $x = 0$, τότε $y = f(0) = 0$.
 - Αν $y = f(x) = 0$, τότε:

$$x(x+3)^2 = 0 \implies x = 0 \text{ ή } x = -3$$

Επομένως, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων είναι τα $(0, 0)$ και $(-3, 0)$.

- β) i. Έχουμε

$$f(x) = x(x+3)^2 = x(x^2 + 6x + 9) = x^3 + 6x^2 + 9x$$

άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x^2 + 4x + 3) = 3(x+3)(x+1).$$

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \implies 3(x+3)(x+1) = 0 \implies x = -3 \text{ ή } x = -1.$$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την f' .

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f					

Με βάση τον πιο πάνω πίνακα, έχουμε:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -3]$ και $[-1, +\infty)$, ενώ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3, -1]$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = -3$, το $f(-3) = 0$, και τοπικό ελάχιστο για $x = -1$, το $f(-1) = -4$.

Εναλλακτικά: Μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο της f χρησιμοποιώντας τον κανόνα του γινομένου:

$$f'(x) = (x+3)^2 + 2x(x+3) = (x+3)(x+3+2x) = 3(x+3)(x+1)$$

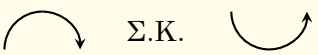
ii. Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$$f''(x) = 6x + 12 = 6(x + 2)$$

Έχουμε:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6(x + 2) = 0 \Rightarrow x = -2$$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την f'' .

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f			

Με βάση τον πιο πάνω πίνακα, έχουμε:

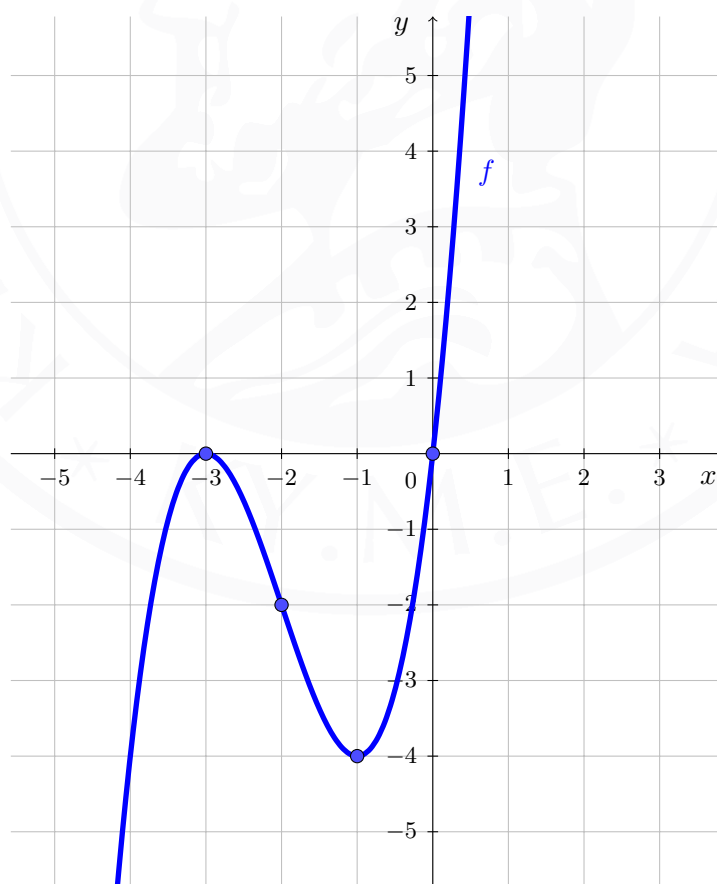
- Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, -2]$ και κυρτή στο $[-2, +\infty)$.
- Η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής, το $(-2, -2)$.

iii. Εξετάζουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού.
Δηλαδή, βρίσκουμε τα όρια της συνάρτησης όταν $x \rightarrow +\infty$ και $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x+3)^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(x+3)^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται πιο κάτω.



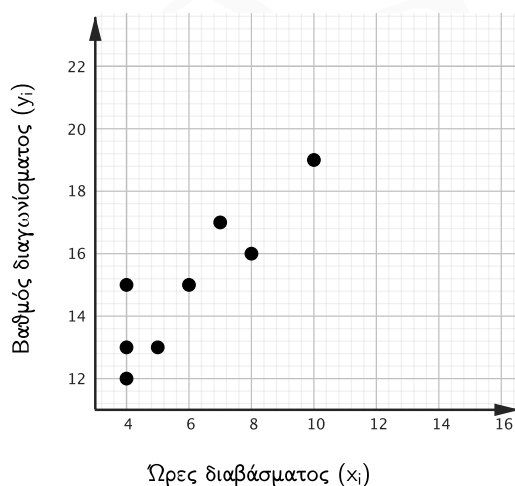
2. Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζονται οι ώρες διαβάσματος οκτώ (8) μαθητών για το διαγώνισμα των Μαθηματικών και ο βαθμός που πήρε ο καθένας στο διαγώνισμα αυτό.

Μαθητής	Ώρες διαβάσματος (x_i)	Βαθμός διαγωνίσματος (y_i)
M1	4	13
M2	6	15
M3	5	13
M4	4	15
M5	10	19
M6	7	17
M7	8	16
M8	4	12

- α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς. (3 Μονάδες)
 β) Να υπολογίσετε τον γραμμικό συντελεστή συσχέτισης. (7 Μονάδες)

Λύση

- α) Το διάγραμμα διασποράς φαίνεται πιο κάτω:



- β) Βρίσκουμε αρχικά

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{\nu} = \frac{48}{8} = 6 \quad \text{και} \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{\nu} = \frac{120}{8} = 15$$

Έπειτα, κατασκευάζουμε τον πιο κάτω πίνακα:

Μαθητής	x_i	y_i	$x_i y_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
M1	4	13	52	4	4
M2	6	15	90	0	0
M3	5	13	65	1	4
M4	4	15	60	4	0
M5	10	19	190	16	16
M6	7	17	119	1	4
M7	8	16	128	4	1
M8	4	12	48	4	9
Σύνολα	48	120	752	34	38

Ακολουθώς βρίσκουμε

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{34}{8}} = 2,06 \quad \text{και} \quad S_y = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{38}{8}} = 2,18.$$

Άρα

$$r = \frac{\sum xy - \nu \bar{x} \bar{y}}{\nu S_x S_y} = \frac{752 - 8 \cdot 6 \cdot 15}{8 \cdot 2,06 \cdot 2,18} = \frac{32}{35,93} = 0,89.$$

3. Μια δεξαμενή περιέχει νερο όγκου $V = 80 \text{ m}^3$. Όταν υπάρχει ροή νερού από τη δεξαμενή, δηλαδή όταν η δεξαμενή αδειάζει, ο όγκος του νερού στη δεξαμενή είναι συνάρτηση του χρόνου t σε ώρες. Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου δίνεται από τον τύπο:

$$V'(t) = (-2t - 2) \text{ m}^3/\text{h}$$

- α) Να βρείτε τον τύπο για τον όγκο νερού στη δεξαμενή συναρτήσει του χρόνου, $V(t)$. (6 Μονάδες)
- β) Να βρείτε τον όγκο του νερού στη δεξαμενή μετά από δύο ώρες. (2 Μονάδες)
- γ) Να εξετάσετε αν μετά από 10 ώρες θα υπάρχει νερό στη δεξαμενή. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (2 Μονάδες)

Λύση

- α) Ο αρχικός όγκος είναι 80 m^3 επομένως για $t = 0 \text{ h}$ είναι $V = 80 \text{ m}^3$, δηλαδή $V(0) = 80$.

$$V(t) = \int V'(t) dt = \int (-2t - 2) dt = -t^2 - 2t + c.$$

Έχουμε $V(0) = 80 \Rightarrow -0 - 0 + c = 80 \Rightarrow c = 80$. Επομένως

$$V(t) = -t^2 - 2t + 80.$$

- β) Έχουμε

$$V(2) = -2^2 - 2 \cdot 2 + 80 = 72.$$

Επομένως θα υπάρχουν 72 m^3 νερό στη δεξαμενή μετά από 2 ώρες.

- γ) Έχουμε

$$V(10) = -10^2 - 2 \cdot 10 + 80 = -40 < 0.$$

Επομένως δεν θα υπάρχει νερό στην δεξαμενή μετά από 10 ώρες.

Εναλλακτικά: Η δεξαμενή θα αδειάσει όταν $V(t) = 0$. Είναι:

$$V(t) = 0 \Rightarrow -t^2 - 2t - 80 = 0 \Rightarrow t^2 + 2t + 80 = 0 \Rightarrow (t + 10)(t - 8) = 0.$$

Άρα $V(t) = 0 \Rightarrow t = -10$ ή $t = 8$. Η περίπτωση $t = -10$ απορρίπτεται αφού δεν γίνεται ο χρόνος να είναι αρνητικός. Άρα $t = 8$ και η δεξαμενή θα αδειάσει μετά από 8 ώρες. Αφού $10 > 8$, τότε δεν θα υπάρχει νερό στη δεξαμενή μετά από 10 ώρες.

Σημείωση: Από την εναλλακτική λύση του (γ), βλέπουμε ότι η συνάρτηση που μας δίνει τον όγκο $V(t) = -t^2 - 2t + 80$ έχει πεδίο ορισμού το $[0, 8]$. Συνεπώς στο ερώτημα (β) έχει νόημα να βρούμε την τιμή του $V(2)$.

4. Σε ένα τραπέζι υπάρχουν ποτήρια γεμάτα πλήρως με χυμό και ένα άδειο κυλινδρικό δοχείο. Το κάθε ποτήρι έχει σχήμα κόλουρου κώνου με ύψος $v_1 = 12 \text{ cm}$ και ακτίνες βάσεων $\rho_1 = 4 \text{ cm}$ και $R_1 = 6 \text{ cm}$, ενώ το κυλινδρικό δοχείο έχει ακτίνα βάσης $R_2 = 16 \text{ cm}$ και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $E_k = 3040\pi \text{ cm}^2$. (Τα τοιχώματα και οι βάσεις των ποτηριών και του κυλινδρικού δοχείου θεωρούνται αμελητέου πάχους.)

- α) Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα (όγκο χυμού) ενός ποτηριού. (2 Μονάδες)
- β) Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα (όγκο) του κυλινδρικού δοχείου. (4 Μονάδες)
- γ) Αδειάζουμε το περιεχόμενο όλων των ποτηριών στο κυλινδρικό δοχείο και η στάθμη του χυμού φτάνει στα $\frac{4}{5}$ του ύψους του κυλίνδρου. Να υπολογίσετε τον αριθμό των ποτηριών που υπήρχαν γεμάτα πλήρως με χυμό πάνω στο τραπέζι. (4 Μονάδες)

Λύση

- α) Ο όγκος κάθε ποτηριού είναι

$$V_{\text{ποτ.}} = \frac{\pi v_1}{3}(\rho_1^2 + \rho_1 R_1 + R_1^2) = \frac{12\pi}{3}(4^2 + 4 \cdot 6 + 6^2) = 304\pi \text{ cm}^3.$$

- β) Για το κυλινδρικό δοχείο, αν συμβολίσουμε το ύψος του με v_2 , έχουμε:

$$E_K = 3040\pi \implies 2\pi R_2 v_2 = 3040\pi \implies 16v_2 = 1520 \implies v_2 = 95 \text{ cm}.$$

Άρα ο όγκος του κυλινδρικού δοχείου είναι

$$V_{\text{δοχ.}} = \pi R_2^2 v_2 = \pi \cdot 16^2 \cdot 95 = 24320\pi \text{ cm}^3$$

- γ) Έστω ν ο αριθμός των ποτηριών που ήταν γεμάτα πλήρως με χυμό πάνω στο τραπέζι. Τότε ο συνολικός όγκος χυμού των ν ποτηριών είναι $304\pi\nu \text{ cm}^3$. Ο όγκος που καταλαμβάνει ο χυμός, όταν αδειάζουμε τα ν ποτήρια στο κυλινδρικό δοχείο είναι ίσος με τα $\frac{4}{5}$ του όγκου του δοχείου, αφού η ακτίνα του δεν αλλάζει. Σύμφωνα με το πρόβλημα, έχουμε

$$304\pi\nu = \frac{4}{5} \cdot 24320\pi = 19456\pi \implies \nu = \frac{19456}{304} = 64.$$

5. Τέσσερις Ιταλοί και δυο Κύπριοι θα παρακολουθήσουν ένα αγώνα του Ευρωπαϊκού πρωταθλήματος ποδοσφαίρου (EURO) σε μια μπυραρία. Η μπυραρία έχει διαθέσιμες τρεις καρέκλες και ένα τετραθέσιο καναπέ, σε σειρά, μπροστά από την τηλεόραση. Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν τα έξι άτομα, αν:

- α) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός, (3 Μονάδες)
- β) οι δυο Κύπριοι θα καθίσουν στον καναπέ, ο ένας δίπλα στον άλλο, (3 Μονάδες)
- γ) τουλάχιστον ένας Κύπριος θα καθίσει σε καρέκλα. (4 Μονάδες)

Λύση

- α) Τα καθίσματα είναι 7 και τα άτομα είναι 6. Άρα, οι διαφορετικοί τρόποι που μπορούν να καθίσουν τα 6 άτομα στα 7 καθίσματα χωρίς περιορισμό, είναι όσες οι διατάξεις των 7 ανά 6, δηλαδή

$$\Delta_6^7 = \frac{7!}{(7-6)!} = \frac{7!}{1!} = 7! = 5040.$$

- β) Σε πρώτη φάση, οι δυο Κύπριοι μπορούν να καθίσουν στον καναπέ ο ένας δίπλα στον άλλο κατά $3 \cdot 2 = 6$ τρόπους: Από τις θέσεις (στη σειρά) Α, Β, Γ, Δ του καναπέ επιλέγουν ένα από τα 3 ζεύγη ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ και κάθονται με 2 διαφορετικούς τρόπους κάθε φορά.

Σε δεύτερη φάση οι διαφορετικοί τρόποι που μπορούν να καθίσουν οι 4 Ιταλοί στις 5 θέσεις που περισσεύουν είναι όσες οι διατάξεις των 5 ανά 4, δηλαδή

$$\Delta_4^5 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 5! = 120.$$

Τελική Απάντηση: Σύμφωνα με την Πολλαπλασιαστική Αρχή Απαρίθμησης, μπορούν να καθίσουν με $6 \cdot 120 = 720$ τρόπους.

γ) Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο, είναι αρκετό να βρούμε τους διαφορετικούς τρόπους που κανέννας από τους δυο Κύπριους δεν κάθεται σε καρέκλα και να τους αφαιρέσουμε από τους διαφορετικούς τρόπους που τα 6 άτομα κάθονται στα 7 καθίσματα, χωρίς περιορισμό, που όπως υπολογίσαμε στο (α) είναι 5040. Οι διαφορετικοί τρόποι που κανέννας από τους δυο Κύπριους δεν κάθεται σε καρέκλα είναι όσοι οι διαφορετικοί τρόποι όπου και οι δυο Κύπριοι κάθονται στον τετραθέσιο καναπέ και οι υπόλοιποι στις θέσεις που περισσεύουν, που είναι $\Delta_2^4 \cdot \Delta_4^5$ και τούτο επειδή: Οι διαφορετικοί τρόποι που μπορούν να καθίσουν οι 2 Κύπριοι στα 4 καθίσματα του καναπέ είναι όσες οι διατάξεις των 4 ανά 2, δηλαδή Δ_2^4 . Οι διαφορετικοί τρόποι που μπορούν να καθίσουν οι υπόλοιποι 4 στα 5 καθίσματα που περισσεύουν είναι όσες οι διατάξεις των 5 ανά 4, δηλαδή Δ_4^5 . Έτσι, σύμφωνα με την Πολλαπλασιαστική Αρχή Απαρίθμησης, έχουμε

$$\Delta_2^4 \cdot \Delta_4^5 = \frac{4!}{(4-2)!} \cdot \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{4!}{2!} \cdot \frac{5!}{1!} = 12 \cdot 120 = 1440.$$

Τελική Απάντηση: $5040 - 1440 = 3600$ τρόποι.

Εναλλακτικά: Θα υπολογίσουμε αρχικά με πόσους τρόπους ακριβώς ένας Κύπριος κάθεται σε καρέκλα, και αργότερα με πόσους τρόπους και οι δύο Κύπριοι κάθονται σε καρέκλα.

Για να βρούμε με πόσους τρόπους ακριβώς ένας Κύπριος κάθεται σε καρέκλα, έχουμε 2 τρόπους να επιλέξουμε ποιος από τους δύο θα καθίσει σε καρέκλα, 3 για να επιλέξουμε σε ποια καρέκλα θα καθίσει και 4 για να επιλέξουμε σε ποια θέση του καναπέ θα καθίσει ο άλλος Κύπριος. Τέλος έχουμε $\Delta_4^5 = 120$ τρόπους για το πως θα καθίσουν οι τέσσερις Ιταλοί στις υπόλοιπες πέντε θέσεις. Άρα αυτό γίνεται με $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 120 = 2880$ τρόπους.

Για να καθίσουν και οι δύο Κύπριοι σε καρέκλα, έχουμε $\Delta_2^3 = 6$ τρόπους για να επιλέξουμε σε ποιες καρέκλες θα καθίσουν και μετά $\Delta_4^5 = 120$ τρόπους για το πως θα καθίσουν οι τέσσερις Ιταλοί στις υπόλοιπες πέντε θέσεις. Άρα αυτό γίνεται με $6 \cdot 120 = 720$ τρόπους.

Τελική Απάντηση: $2880 + 720 = 3600$ τρόποι.